Multiplikatywna teoria liczb (DMLT LM0)

Zestaw 5 - Wartości średnie funkcji arytmetycznych i pewne sumy po liczbach pierwszych

Zadanie 1. Pokaż, że jeżeli f jest funkcją arytmetyczną oraz $F(x) = \sum_{n \leqslant x} f(n)$, to

$$\sum_{m \leqslant x} F\left(\frac{x}{m}\right) = \sum_{d \leqslant x} f(d) \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor = \sum_{n \leqslant x} \sum_{d|n} f(d).$$

Zadanie 2. Korzystając z Zadania 1 pokaż, że

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\mu(n)}{n} = O(1).$$

Zadanie 3. Korzystając z Zadania 1 pokaż, że

$$\sum_{n \leqslant x} d(n) = x \ln x + O(x).$$

Zadanie 4. Niech $f(x), g(x)$ będą funkcjami określonymi na zbiorze $[1, \infty)$. Pokaż, że

$$g(x) = \sum_{n \leqslant x} f\left(\frac{x}{n}\right)$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$f(x) = \sum_{n \leqslant x} \mu(n) g\left(\frac{x}{n}\right)$$

Zadanie 5. Pokaż, że dla $x \geqslant 2$ mamy

(a) $\sum_{p \leqslant x} \frac{\ln^2 p}{p} = \frac{1}{2} \ln^2 x + O(\ln x)$

(b) $\sum_{p \leqslant x} \frac{\ln^k p}{p} = \frac{1}{k} \ln^k x + O(\ln^{k-1} x)$ dla $k \geqslant 1$.

Zadanie 6. Korzystając z faktu, że $\omega(n) = \sum_{p|n} 1$ pokaż, że

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} \omega(n) = \ln \ln x + c + O\left(\frac{1}{\ln x}\right),$$

gdzie c jest stałą z II twierdzenia Mertnesa.

Zadanie 7. Korzystając z postulatu Bertranda pokaż, że każdą liczbę naturalną większą od 1 można zapisać jako sumę różnych liczb pierwszych.