Multiplikatywna teoria liczb (DMLT LM0)

Zestaw 4 - Sumowanie przez części

Zadanie 1. Korzystając z sumowania Abela i zasady indukcji pokaż, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ istnieje wielomian P_k stopnia $k+1$, taki że współczynnik przy najwyższej potędze wynosi $\frac{1}{k+1}$ oraz

$$\sum_{n=1}^{N} n^k = P_k(N) \qquad \text{dla } N \in \mathbb{N}.$$

Wyznacz wielomiany P_1, P_2.

Zadanie 2. Korzystając z sumowania przez części pokaż, że dla $x \geqslant 2$ mamy

(a) $\sum_{n \leqslant x} \sqrt{n} = \frac{2}{3} x^{3/2} + O(\sqrt{x})$.

(b) $\sum_{n \leqslant x} \frac{1}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{x} + c + O(\frac{1}{\sqrt{x}})$ dla pewnej stałej c.

(c) $\sum_{n \leqslant x} \frac{\ln n}{n} = \frac{1}{2} \ln^2 x + c + O(\frac{\ln x}{x})$ dla pewnej stałej c.

(d) $\sum_{2 \leqslant n \leqslant x} \frac{1}{n \ln n} = \ln \ln x + c + O(\frac{1}{x \ln x})$ dla pewnej stałej c.

Zadanie 3. Pokaż, że dla $x \geqslant 2$ mamy

(a) $\sum_{n \leqslant x} \ln^2 n = x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + O(\ln^2 x)$

(b) $\sum_{n \leqslant x} \ln^2 \frac{x}{n} = 2x + O(\ln^2 x)$

(c) $\sum_{n \leqslant x} \ln^k n = x \ln^k x - k \sum_{n \leqslant x} \ln^{k-1} n + O(\ln^k x)$ dla $k \geqslant 1$.

(d) $\sum_{n \leqslant x} \ln^k n = x P_k(\ln x) + O(\ln^k x)$, gdzie P_k jest wielomianem stopnia k o współczynnikach całkowitych.

(e) $\sum_{n \leqslant x} \ln^k \frac{x}{n} = k! x + O(\ln^k x)$ (Wskazówka: pokaż, że $\sum_{n \leqslant x} \ln^k \frac{x}{n} - k \sum_{n \leqslant x} \ln^{k-1} \frac{x}{n} = O(\ln^k x)$).

Zadanie 4. Niech $A = (a_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie nieskończonym rosnącym ciągiem składającym się z liczb naturalnych. Pokaż, że jeżeli

$$A(x) = \sum_{a_n \leqslant x} 1 \ll \frac{x}{(\ln x)^2} \qquad \text{dla } x \geqslant 2,$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ jest zbieżny.

Zadanie 5. Dla funkcji arytmetycznej f zdefiniujmy wielkości

$$M(f) = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} f(n), \qquad L(f) = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\ln x} \sum_{n \leqslant x} \frac{f(n)}{n}.$$

(a) Pokaż, że jeżeli $M(f)$ istnieje, to również $L(f)$ istnieje oraz $M(f) = L(f)$.

(b) Niech $f(n) = n$ dla $n = 2^k$ oraz $f(n) = 0$ w przeciwnym wypadku. Pokaż, że wówczas $M(f)$ nie istnieje, ale $L(f) = \frac{1}{\ln 2}$.