Multiplikatywna teoria liczb (DMLT LM0)

Zestaw 3 - Funkcje arytmetyczne

Zadanie 1. Pokaż, że jeżeli funkcja f jest multiplikatywna, to

$$\sum_{d|n} \mu(d)f(d) = \prod_{p|n}(1 - f(p)).$$

Wywnioskuj stąd, że $\varphi = \mu * \mathrm{id}$, a następnie, że dla $n \geqslant 1$ mamy $\sum_{d|n} \varphi(n) = n$.

Zadanie 2. Pokaż, że funkcja $\omega(n)$ jest addytywna, a funkcja $\Omega(n)$ jest całkowicie addytywna. Wywnioskuj, że funkcja $(-1)^{\omega(n)}$ jest multiplikatywna, a funkcja Liouville'a $\lambda(n)$ jest całkowicie multiplikatywna.

Zadanie 3. Pokaż, że $d = 1 * 1$, a następnie wywnioskuj, że d jest funkcją multiplikatywną oraz, że splot Dirichleta funkcji całkowicie multiplikatywnych nie musi być funkcją całkowicie multiplikatywną. Podaj przykład pokazujący, że funkcja odwrotna względem splitu Dirichleta do funkcji całkowicie multiplikatywnej nie musi być całkowicie multiplikatywna.

Zadanie 4.

(a) Wyznacz wartość $d(p^k)$, gdzie p jest liczbą pierwszą i $k \in \mathbb{N}$.

(b) Pokaż, że $d(n)$ jest liczbą pierwszą wtedy i tylko wtedy, gdy $n = p^{q-1}$ dla liczb pierwszych p, q.

(c) Pokaż, że $d(mn) \leqslant d(m)d(n)$ dla dowolnych liczb naturalnych n, m.

(d) Pokaż, że $2^{\omega(n)} \leqslant d(n) \leqslant 2^{\Omega(n)}$. Dla jakich n zachodzi równość $d(n) = 2^{\omega(n)}$.

Zadanie 5. Pokaż, że funkcja $\sigma_\alpha(n) = \sum_{d|n} d^\alpha$ jest funkcją multiplikatywną dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{C}$. Oblicz $\sigma_\alpha(p^k)$, gdzie p jest liczbą pierwszą i $k \in \mathbb{N}$.

Zadanie 6. Pokaż, że liczba przysta n jest doskonała tzn. $\sigma(n) = 2n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ dla pewnej liczby pierwszej p, dla której $2^p - 1$ jest liczbą pierwszą.

Zadanie 7. Wykorzystując multiplikatywność pokaż, że

$$\frac{n}{\varphi(n)} = \sum_{d|n} \frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)} \qquad \text{dla } n \geqslant 1.$$

Zadanie 8. Pokaż, że funkcja $f(n) = \sum_{d^2|n} \mu(d)$ jest funkcją multiplikatywną, a następnie pokaż, że

$$\sum_{d^2|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } n \text{ jest liczbą bezkwadratową,} \\ 0, & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

W jaki sposób zmieni się powyższa równość, gdy pod symbolem sumy zmienimy d^2 na d^k dla $k \geqslant 2$.

Zadanie 9. Wyznacz funkcję odwrotną względem splotu Dirichleta do funkcji Liouville'a $\lambda(n)$ oraz pokaż, że

$$\sum_{d|n} \lambda(d) = \begin{cases} 1, & n \text{ jest kwadratem liczby naturalnej,} \\ 0, & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$