Multiplikatywna teoria liczb (DMLT LM0)

Zestaw 2 - Nieskończoność zbioru liczb pierwszych

Zadanie 1. Liczby pierwsze p, q nazywamy bliźniaczymi, gdy $|p-q| = 2$.

(a) Znajdź wszystkie liczby pierwsze p, takie że $29p+1$ jest kwadratem liczby naturalnej.

(b) Udowodnij, że $pq+1$ jest kwadratem liczby naturalnej dla liczb pierwszych p, q wtedy i tylko wtedy, gdy p, q są bliźniaczymi liczbami pierwszymi.

(c) Udowodnij, że jeżeli p, q są bliźniaczymi liczbami pierwszymi większymi od 3, to $p+q$ jest podzielne przez 12.

Zadanie 2.

(a) Wyznacz największą potęgę liczby 2 dzielącą liczbę 2021!.

(b) Wyznacz największą potęgę liczby 3 dzielącą liczbę 2021!.

(c) Znajdź rozkład liczby 2021! na iloczyn liczb pierwszych.

(d) Jakim wzorem można opisać największą potęgę liczby pierwszej p dzielącą $n!$.

Zadanie 3. Niech $F_n = 2^{2^n} + 1$ dla $n \geqslant 0$ oznacza ciąg liczb Fermata.

(a) Pokaż, że F_n dla $n = 0, 1, 2, 3, 4$ jest liczbą pierwszą.

(b) Pokaż, że 641 dzieli F_5.

(c) Stosując zasadę indukcji pokaż, że $F_m - 2 = F_0 F_1 \cdots F_{m-1}$ dla $m \geqslant 1$.

(d) Pokaż, że jeżeli $n < m$, to $F_n | (F_m - 2)$.

(e) Pokaż, że różne liczby Fermata są względnie pierwsze.

(f) Wywnioskuj z ostatniego podpunktu, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych.

Zadanie 4. Załóżmy, że $p_1, p_2, \dots, p_r$ są wszystkimi liczbami pierwszymi oraz N jest dostatecznie dużą liczbą naturalną taką, że $N > p_1 p_2 \cdots p_r$ oraz $N > \frac{2^r}{\delta}$, gdzie $\delta = 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

(a) Pokaż, że $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Wywnioskuj, że $\delta > 0$.

(b) Pokaż, że liczb naturalnych $m \leqslant N$, które nie są podzielne przez żaden kwadrat liczby naturalnej, jest dokładnie 2^r.

(c) Pokaż, że liczb naturalnych $m \leqslant N$ podzielnych przez p_i^2 jest co najwyżej $\frac{N}{p_i^2}$.

(d) Wywnioskuj, że $N \leqslant 2^r + N(1 - \delta)$, co prowadzi do sprzeczności.

Zadanie 5. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych postaci $4k+3$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. *Wskazówka:* Zmodyfikuj dowód Euklidesa rozważając liczbę $N = 4p_1 p_2 \cdots p_n + 3$.

Zadanie 6. Udowodnij, że $\pi(n) \leqslant n/2$ dla $n \geqslant 8$.

Zadanie 7. Udowodnij, że $\pi(n) \leqslant n/3$ dla $n \geqslant 33$. *Wskazówka:* Wykorzystaj fakt, że każda liczba pierwsza większa od 3 jest postaci $6k+1$ lub $6k+5$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$.

Zadanie 8. Czy można uznać za wiarygodne badania, które wskazują, że wśród 1000 osób: 816 interesuje się historią, 723 biologią, 645 fizyką, 562 historią i biologią, 463 historią i fizyką, 470 biologią i fizyką oraz 310 wszystkimi trzema dziedzinami? Jeśli tak, to ile osób nie interesuje się żadną z tych dziedzin?

Zadanie 9. Ile liczb naturalnych z przedziału $[1, 1000]$ nie jest podzielnych przez 4, 6 i 10?

Zadanie 10.

(a) Jaka jest liczba całkowitych rozwiązań (x, y, z) równania

$$x + y + z = 50,$$

takich że $x, y, z \geqslant 0$.

(b) Jaka jest liczba całkowitych rozwiązań (x, y, z) równania

$$x + y + z = 50,$$

takich że $0 \leqslant x, y, z \leqslant 19$.

Zadanie 11. Niech $N \in \mathbb{N}$ oraz $p_1, p_2, \ldots, p_n$ będą wszystkimi liczbami pierwszymi dzielącymi N. Ponadto załóżmy, że S_j oznacza zbiór liczb naturalnych nie większych niż N podzielnych przez p_j. Stosując zasadę włączania-wyłączania dla zbiorów S_j pokaż, że

$$\varphi(N) = N \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Zadanie 12. Liczbę naturalną nazywamy bezkwadratową, o ile nie dzieli się ona przez kwadrat żadnej liczby pierwszej. Niech $S(x)$ oznacza liczbę liczb bezkwadratowych nie większych niż x.

(a) Korzystając z metody sita pokaż, że $S(x) = \sum_{d \leqslant \sqrt{x}} \mu(d) \left\lfloor \frac{x}{d^2} \right\rfloor$.

(b) Pokaż, że $\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} = \frac{1}{\zeta(2)}$.

(c) Korzystając z faktu, że $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ pokaż, że $S(x) = \frac{6}{\pi^2}x + O(\sqrt{x})$.