Multiplikatywna teoria liczb (DMLT LM0)

Zestaw 1 - Notacja $O(\cdot)$, $o(\cdot)$ oraz symbol Winogradowa

Definicja 1. Niech $A \subset D \subset \mathbb{R}$ oraz $f : D \to \mathbb{C}$ oraz $g : D \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$. Mówimy, że $f(x) \ll g(x)$ lub równoważnie $f(x) = O(g(x))$ dla $x \in A$, jeżeli istnieje stała $c > 0$, taka że

$$|f(x)| \leqslant cg(x) \qquad \text{dla } x \in A$$

Symbol $\ll$ nazywamy symbolem Winogradowa. Ponadto, piszemy $g \gg f$, o ile $f \ll g$, oraz $f \asymp g$, o ile $f \ll g$ i $g \ll f$.

Jeżeli D jest przedziałem zawierającym $+\infty$, to mówimy, że $f(x) = O(g(x))$ dla dostatecznie dużego x, jeżeli istnieje x_0, takie że $f(x) = O(g(x))$ dla $x \geqslant x_0$.

Definicja 2. Niech $D \subset \mathbb{R}$, $f, g : D \to \mathbb{R}$. Mówimy, że $f(x) = o(g(x))$ dla $x \to x_0$ ($x_0 \in D$ lub $x_0 = \pm\infty$), jeżeli $g(x) \neq 0$ dla $x \to x_0$ oraz

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to 0, \qquad \text{gdy } x \to x_0.$$

Ponadto, mówimy, że $f(x) \sim g(x)$ dla $x \to x_0$ ($x_0 \in D$ lub $x_0 = \pm\infty$), jeżeli $g(x) \neq 0$ dla $x \to x_0$ oraz

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to 1, \qquad \text{gdy } x \to x_0.$$

Zadanie 1. Sprawdź, czy

(a) $4x^2 \ll x^3$ dla $x \geqslant 1$;

(b) $x^2 \ll x^3$ dla $x \geqslant 0$;

(c) $\ln x = o(x^{\frac{1}{5}})$ dla $x \to +\infty$;

(d) $\ln x \ll x^{\frac{1}{5}}$ dla dostatecznie dużego x;

(e) $\ln x \ll x^{\frac{1}{5}}$ dla $x \geqslant 1$;

(f) $\ln x \ll x^{\varepsilon}$ dla $x \geqslant 1$ i dowolnego $\varepsilon > 0$;

(g) $|\log_a x| \asymp \ln x$ dla $x \geqslant 1$ i dowolnego $a \in (0,1) \cup (1, +\infty)$;

(h) $(\ln x)^a = o(x^{\varepsilon})$ dla $x \to +\infty$ i dowolnych $a, \varepsilon > 0$;

(i) $(\ln x)^a = O(x^{\varepsilon})$ dla $x \geqslant 1$ i dowolnych $a, \varepsilon > 0$;

(j) $x^{\alpha} \ll e^{cx}$ dla $x \geqslant 0$, dowolnego α i dowolnego $c > 0$;

(k) $\log(1 + x) \ll |x|$ dla $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$;

(l) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + O(|x|^3)$ dla $x \in (-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$;

(m) $\sin(x) \ll x^{\frac{1}{2}}$ dla $x \geqslant 0$;

(n) $\cos x = 1 + O(x^2)$ dla $x \geqslant 0$;

(o) $\frac{1}{1+x} = 1 + O(x)$ dla $x \geqslant 0$;

(p) $x^{-\varepsilon} \ll \exp(-(\ln x)^{\alpha}) \ll \frac{1}{(\ln x)^a}$ dla dostatecznie dużego x i dowolnych $\varepsilon > 0$, $\alpha \in (0,1)$, $a > 0$;

(q) $x^{1+\frac{1}{\ln x}} \asymp x$ dla $x \geqslant 1$.

Zadanie 2. Uzasadnij, że

(a) $O(f(x)) + O(g(x)) = O(f(x) + g(x))$;

(b) $O(f(x))O(g(x)) = O(f(x)g(x))$;

(c) jeżeli $f(x) \ll g(x)$ i $g(x) \ll h(x)$, to $f(x) \ll h(x)$;

(d) jeżeli $f(x) = o(g(x))$ dla $x \to \infty$, to $f(x) = O(g(x))$ dla dostatecznie dużych x;

(e) $x^2 + 3x - 2 \ll x^2$ dla $x \geqslant 1$;

(f) $\log_2(x) + 3\ln(x) + 2x^3 - 4x + 2 \ll x^3$ dla $x \geqslant 1$;

(g) $x^3 \log_2(x)\ln(x) + 3x^2\sqrt{x}\ln(x) + 2x^2\ln^9(x) + x \ll x^3(\ln x)^2$ dla $x \geqslant 2$;

(h) $(x+1)^2\ln(x^4 - 3) \ll x^2 \ln x$ dla $x \geqslant 2$.

Zadanie 3. Niech $g(x) = O(f(x))$ dla dostatecznie dużego x oraz $f(x) \to 0$, gdy $x \to +\infty$. Pokaż, że dla dostatecznie dużego x mamy

$$\ln(1 + g(x)) \ll f(x) \qquad \text{oraz} \qquad \frac{1}{1+g(x)} = 1 + O(f(x)).$$

Zadanie 4. Udowodnij, że $f(x) = g(x) + O(1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $e^{f(x)} \asymp e^{g(x)}$.