

Zestaw 6 - Grupa permutacji

Zadanie 1. Niech $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ i $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$. Obliczyć: $\tau\sigma$, $\sigma\tau$, $\tau\sigma\tau$, σ^{-1} , $\tau^{-1}\sigma\tau$.

Zadanie 2. Zbudować tabelkę działania w S_3 .

Zadanie 3. W grupie S_5 rozwiązać równanie :

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} x \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$

Zadanie 4. Daną permutację $\sigma \in S_9$ przedstawić w postaci iloczynu transpozycji. Czy permutacja σ jest parzysta czy nieparzysta? Określ znak tej permutacji.

(a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 9 & 8 & 3 & 7 & 4 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

(b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 1 & 9 & 8 & 7 & 2 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

(c) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 2 & 9 & 8 & 7 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

Zadanie 5. Pokaż, że funkcja $f : S_n \rightarrow \{-1, 1\}$ określona wzorem $f(\sigma) = \text{sgn}(\sigma)$ jest homomorfizmem grup dla dowolnego $n \geq 2$, gdzie grupa $\{-1, 1\}$ rozważana jest ze zwykłym mnożeniem.

Zadanie 6. Korzystając z rozkładu na cykle rozłączne pokaż, że dla dowolnej permutacji $\sigma \in S_6$ istnieje $k \leq 6$, takie że $\sigma^k = \text{id}$. Czy zawsze prawdziwe jest analogiczne stwierdzenie, gdy liczbę 6 zamienimy przez dowolną liczbę naturalną $n \geq 2$?