

Zestaw 5 - Pozostałe struktury algebraiczne i pojęcie izomorfizmu

Zadanie 1. Wyjaśnij, które z poniższych struktur są pierścieniami, pierścieniami przemiennymi, pierścieniami z jedynką lub ciałami:

- a) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$; b) $([0, +\infty), +, \cdot)$; c) $(n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ dla $n \in \mathbb{N}$;
 d) $(\mathbb{R}_+, \cdot, +)$; e) $\mathbb{R}^2$ z $+$ i $\cdot$ po współrzędnych; f) $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$.

Zadanie 2. Czy zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ z działaniami

$$x \oplus y = x + y - 1, \quad x \otimes y = xy - x - y + 2$$

jest ciałem?

Zadanie 3. Zbadaj, czy funkcja φ jest homomorfizmem grup:

- a) $\varphi : (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$, $\varphi(x) = mx$, $m \in \mathbb{Z}$; b) $\varphi : (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}_+, \cdot)$, $\varphi(x) = |x|$;
 c) $\varphi : (\mathbb{R}_+, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}, +)$, $\varphi(x) = \sqrt[3]{x}$; d) $\varphi : (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\{-1, 1\}, \cdot)$, $\varphi(x) = \cos(\pi x)$.

Które z powyższych homomorfizmów są izomorfizmami?

Zadanie 4. Porównaj tabelki działań w grupach: $(\mathbb{Z}_4, +_4)$, $(\{1, 5, 7, 11\}, +_{12})$, $(\{1, 2, 3, 4\}, +_5)$, $(\{1, 3, 5, 7\}, +_8)$. Które z tych grup są izomorficzne?

Zadanie 5. Zbadaj czy poniższe struktury są izomorficzne:

- a) $(\mathbb{Z}, +)$, $(2\mathbb{Z}, +)$; b) $(\mathbb{R}_+, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +)$;
 c) $(\mathbb{Z}_n, +_n)$, $(\mathbb{Z}_m, +_m)$ dla $n \neq m$; d) $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$.

Zadanie 6. W zbiorze $\mathbb{Q}$ określamy dwa działania $\oplus$ oraz $\odot$ następującymi wzorami

$$a \oplus b = a + b + 1, \quad a \odot b = a + b + ab.$$

Wykazać, że grupy $(\mathbb{Q}, \oplus)$ (odpowiednio $(\mathbb{Q} \setminus \{-1\}, \odot)$) są izomorficzne z $(\mathbb{Q}, +)$ (odpowiednio $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$). Czy $(\mathbb{Q}, \oplus, \odot)$ jest ciałem? Jeśli tak, to wyjaśnij czy jest ono izomorficzne z $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$.

Zadanie 7. Niech n będzie ustaloną liczbą naturalną. Wykazać, że odwzorowanie $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$, które liczbom całkowitym przyporządkowuje ich reszty z dzielenia przez n jest homomorfizmem pierścieni.

Zadanie 8. Korzystając z powyższego zadania wykaż, że równanie

$$15x^2 + 7y^2 + 5z + 9 = 0$$

nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych.