

Zestaw 4 - Własności działań i pojęcie grupy

Zadanie 1. W którym spośród zbiorów : $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, $\{-1, 0, 1\}$, $\{0, 1\}$, $\{0\}$ wzór $a \star b = a^2 - b^2$ określa działanie?

Zadanie 2. Zbadaj własności działania:

- | | |
|---|---|
| a) $a \star b = ab - a - b + 2$ w zbiorze $\mathbb{R}$; | b) $a \star b = a^2 + b - 1$ w zbiorze $\mathbb{Z}$; |
| c) $a \star b = \frac{a+b}{2}$ w zbiorze $\mathbb{Q}$; | d) $a \star b = a + b + ab$ w zbiorze $\mathbb{R}$; |
| e) $a \star b = a^2 + 5b$ w zbiorze $\mathbb{Z}$; | f) $a \star b = 5^{\log_5 a \cdot \log_5 b}$ w zbiorze $\mathbb{R}^+$; |
| g) $a \star b = \frac{ab}{a+b}$ w zbiorze $\mathbb{R}^+$; | h) $a \star b = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ w zbiorze $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; |
| i) $(a, b) \star (c, d) = (ac, bc + d)$ w zbiorze $\mathbb{R}^2$; | |
| j) $(a_1, a_2, a_3) \star (b_1, b_2, b_3) = (a_1 b_1, a_1 b_2 + a_2 b_3, a_3 b_3)$ w zbiorze $\mathbb{R}^3$. | |

Zadanie 3. Dla dowolnego $k \in \mathbb{R}$ w zbiorze $G = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zdefiniujmy działanie

$$(a_1, a_2) \star (b_1, b_2) = (a_1 b_1 + k a_2 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

Udowodnij, że powyższe działanie jest łączne i posiada element neutralny w zbiorze G . Sprawdź dla jakich k prawdą jest, że dla dowolnych $G \ni (a_1, a_2) \neq (0, 0)$ i dowolnych $(b_1, b_2), (c_1, c_2) \in G$

$$\text{jeżeli } (a_1, a_2) \star (b_1, b_2) = (a_1, a_2) \star (c_1, c_2), \text{ to } (b_1, b_2) = (c_1, c_2).$$

Zadanie 4. Które z działań z Zadania 2 tworzą grupę wraz z danym zbiorem? Które z nich są grupami abelowymi?

Zadanie 5. Niech G będzie grupą z działaniem $\star$. Udowodnij, że dla dowolnych $a, b, c \in G$ zachodzi równość

$$((a \star b^{-1}) \star c)^{-1} = (c^{-1} \star b) \star a^{-1}.$$

Ponadto udowodnij, że jeżeli $a \star b = b \star a$ oraz $a \star c = c \star a$, to $a \star (b \star c^{-1}) = (b \star c^{-1}) \star a$.

Zadanie 6. Sprawdź, czy struktury $(\mathbb{Z}_4, +)$, $(\{1, 5, 7, 11\}, \cdot_{12})$, $(\{1, 2, 3, 4\}, \cdot_5)$, $(\{1, 3, 5, 7\}, \cdot_8)$ są grupami.

Zadanie 7. Niech $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ i niech dla $i = 1, 2, \dots, 6$ funkcje $f_i : D \rightarrow D$ będą określone wzorami: $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \frac{1}{1-x}$, $f_3(x) = \frac{x-1}{x}$, $f_4(x) = \frac{1}{x}$, $f_5(x) = 1-x$, $f_6(x) = \frac{x}{x-1}$. Sprawdzić, że składanie funkcji jest działaniem w $G = \{f_1, f_2, \dots, f_6\}$ (zbudować tabelkę). Czy para $\langle G, \circ \rangle$ jest grupą?

Zadanie 8. Niech D_3 oraz D_4 oznaczają odpowiednio zbiór wszystkich izometrii własnych trójkąta równobocznego i kwadratu. Pokaż, że D_3 i D_4 tworzą grupę ze składaniem przekształceń. Utwórz tabelki działań w tych grupach.