

Wstęp do algebry i teorii liczb
Zestaw 3 - Kongruencje

Zadanie 1. Znaleźć, jeśli istnieje, element odwrotny do a modulo n .

- | | | |
|----------------------|-------------------------|---------------------------|
| (a) $a = 5, n = 7$; | (c) $a = 35, n = 100$; | (e) $a = 81, n = 256$; |
| (b) $a = 6, n = 9$; | (d) $a = 35, n = 101$; | (f) $a = 111, n = 1891$; |

Zadanie 2. Rozwiązać równania

- | | |
|---------------------------------|---------------------------------------|
| (a) $3x \equiv 2 \pmod{5}$ | (d) $6x + 1 \equiv 3 \pmod{10}$ |
| (b) $7x \equiv 4 \pmod{12}$ | (e) $243x + 17 \equiv 101 \pmod{125}$ |
| (c) $6x + 1 \equiv 2 \pmod{10}$ | (f) $21x + 5 \equiv 0 \pmod{29}$ |

Zadanie 3. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{7} \\ x \equiv 1 \pmod{8} \\ x \equiv 0 \pmod{11} \end{cases} \quad \begin{cases} 2x \equiv 6 \pmod{4} \\ 6x \equiv 22 \pmod{10} \\ 9x \equiv 15 \pmod{21} \end{cases}$$
$$\begin{cases} 6x \equiv 2 \pmod{10} \\ 2x + 5 \equiv 2 \pmod{11} \\ 6x \equiv 12 \pmod{16} \end{cases} \quad \begin{cases} 6x \equiv 4 \pmod{8} \\ 4x \equiv 5 \pmod{13} \\ 4x \equiv 8 \pmod{14} \\ 8x \equiv 1 \pmod{15} \end{cases}$$

Zadanie 4. Wyznacz resztę z dzielenia 174^{249} przez 13, 5^{123} przez 24 oraz 2^{64} przez 360.

Zadanie 5. Znajdź ostatnią cyfrę liczb 7177^{379} i $1863^{25} - 5$.

Zadanie 6. Znajdź trzy ostatnie cyfry liczby 5^{1234} .

Zadanie 7. Wyprowadź cechy podzielności przez 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 16.

Zadanie 8. Wykaż, że

- | | |
|-------------------------------------|---|
| (a) $13 3^{1974} + 5^{1974}$; | (d) $7 2^{n+2} + 3^{2n+1}$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$; |
| (b) $5 3^{53} + 7^{32} + 6^{13}$; | (e) $21 2^{4^n} + 5$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$; |
| (c) $7 2222^{5555} + 5555^{2222}$; | (f) $35 3^{6^n} - 2^{6^n}$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$; |

Zadanie 9. Znajdź wszystkie liczby pierwsze p , dla których $11|2^p + 3^p$.