

Wstęp do algebry i teorii liczb
Zestaw 2 - Liczby pierwsze

Zadanie 1. Czy liczby 127,919,7429 są liczbami pierwszymi?

Zadanie 2.

- (a) Wyznacz największą potęgę liczby 2 dzielącą liczbę 2025!.
- (b) Wyznacz największą potęgę liczby 3 dzielącą liczbę 2025!.

Zadanie 3. Wskazać ciąg 2025 kolejnych liczb naturalnych, który nie zawiera liczb pierwszych.

Zadanie 4. Niech p będzie liczbą pierwszą. Pokaż, że dla $k \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ mamy $p \mid \binom{p}{k}$. Czy własność ta jest prawdziwa bez założenia, że p jest liczbą pierwszą? *Wskazówka:* Załóż, że p jest liczbą złożoną, $q \mid p$ dla pewnej liczby pierwszej q oraz k jest największą liczbą naturalną taką, że $q^k \mid p$. Zastanów się, czy $q^k \mid \binom{p}{k}$.

Zadanie 5. Udowodnij, że $\sqrt[n]{p}$ nie jest liczbą wymierną dla żadnej liczby pierwszej p i liczby naturalnej $n \geq 2$.

Zadanie 6. Niech $p > 3$ będzie liczbą pierwszą. Pokaż, że $24 \mid p^2 - 1$.

Zadanie 7. Wykazać, że

- (a) każda liczba pierwsza $p > 3$ jest postaci $6k + 1$ lub $6k + 5$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.
- (b) kwadrat dowolnej liczby pierwszej $p > 3$ ma postać $12k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$.
- (c) liczby postaci $6n + 1$, $n \in \mathbb{N}$, nie można przedstawić jako różnicy liczb pierwszych.
- (d) kwadrat liczby $N = 3m + 2$, $m \in \mathbb{N}$, nie może być sumą liczby pierwszej i kwadratu liczby naturalnej.

Zadanie 8. Pokaż, że dla dowolnego $n > 2$ istnieje co najmniej jedna liczba pierwsza p spełniająca nierówność $n < p < n!$ (Rozważ dzielniki liczby $n! - 1$).

Zadanie 9. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych postaci $4k + 3$, gdzie $k \in \mathbb{N}$. *Wskazówka:* Zmodyfikuj dowód Euklidesa rozważając liczbę $N = 4p_1p_2 \cdots p_n + 3$.

Zadanie 10. Liczby pierwsze p, q nazywamy bliźniaczymi, gdy $|p - q| = 2$.

- (a) Znajdź wszystkie liczby pierwsze p , takie że $29p + 1$ jest kwadratem liczby naturalnej.
- (b) Udowodnij, że $pq + 1$ jest kwadratem liczby naturalnej wtedy i tylko wtedy, gdy p, q są bliźniaczymi liczbami pierwszymi.
- (c) Udowodnij, że jeżeli p, q są bliźniaczymi liczbami pierwszymi większymi od 3, to $p + q$ jest podzielne przez 12.

Zadanie 11. Ile różnych dzielników ma liczba $n = 2^{11} \cdot 3^9 \cdot 5^4 \cdot 7^{2025}$?