

Zestaw 1 - Teoria podzielności i algorytm Euklidesa

Zadanie 1. Niech $n \geq 2$ będzie pewną liczbą naturalną. Załóżmy, że liczby naturalne a, b przy dzieleniu przez n dają reszty 2 i 3, odpowiednio. Ile wynosi liczba n , jeżeli wiemy, że iloczyn ab daje resztę 2 przy dzieleniu przez n ?

Zadanie 2. Udowodnij, że jeżeli ostatnią cyfrą liczby n jest 5, to dwie ostatnie cyfry liczby n^2 tworzą liczbę 25.

Zadanie 3. Pokaż, że kwadrat dowolnej liczby całkowitej nie może być postaci $3k + 2$, $k \in \mathbb{Z}$. Wywnioskuj, że w trójkącie pitagorejskim (trójkącie prostokątnym, którego długości boków są liczbami naturalnymi) co najmniej jedna przyprostokątna dzieli się przez 3.

Zadanie 4. Pokaż, że

$$(a) \text{ jeśli } 11|a + 5b, \text{ to } 11|9a + b; \qquad (b) \text{ jeśli } \frac{2a+3b}{17} \in \mathbb{Z}, \text{ to } \frac{7a+2b}{17} \in \mathbb{Z};$$

Zadanie 5. Udowodnij, że

- (a) jeżeli $a|b$ i $(b, c) = 1$, to $(a, c) = 1$;
- (b) jeżeli $(a, b) = 1$, to $(a + b, b - a) \in \{1, 2\}$;
- (c) $(a, b) = (a, a - b)$ dla dowolnych $a, b \in \mathbb{N}$, takich że $a > b$;
- (d) $(a, b) = (5a + 3b, 13a + 8b)$ dla dowolnych $a, b \in \mathbb{N}$;
- (e) $(2n + 5, 3n + 7) = 1$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$;
- (f) $(n! + 1, (n + 1)! + 1) = 1$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$;

Zadanie 6. Niech $u, v \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ oraz $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ spełniając równość $ad - bc = \pm 1$. Ponadto załóżmy, że

$$u' = au + bv \neq 0, \qquad v' = cu + dv \neq 0.$$

Pokaż, że $(u, v) = (u', v')$. *Wskazówka:* Patrz Zadanie 5(b,c).

Zadanie 7. Przy pomocy algorytmu Euklidesa wyznacz: $(14, 35)$, $(180, 252)$, $(257, 125)$, $(2873, 6643)$, $(1001, 7655)$, $(4148, 7684)$, $(819, 702, 689)$, $(3059, 2737, 943)$, a następnie wynik przedstaw w postaci odpowiedniej kombinacji liniowej.

Zadanie 8. Jaka jest najmniejsza dodatnia liczba wymierna, którą można przedstawić w postaci $\frac{x}{77} + \frac{y}{91}$ dla $x, y \in \mathbb{Z}$?

Zadanie 9. Rozwiąż następujące równania w liczbach całkowitych

(a) $22x + 26y = 738$

(c) $3x + 5y + 6z = 5$

(b) $18x + 11y = 1188$

(d) $3x + 2y + 4z = 1$

Zadanie 10. Ciąg Fibonacciego definiujemy jako ciąg liczb f_n spełniających równości: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ i $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ dla $n \geq 0$. Pokaż, że $(f_n, f_{n+1}) = 1$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

Zadanie 11. Niech $F_n = 2^{(2^n)} + 1$ dla $n \geq 0$ oznacza ciąg liczb Fermata.

(a) Stosując zasadę indukcji pokaż, że $F_m - 2 = F_0 F_1 \cdots F_{m-1}$ dla $m \geq 1$.

(b) Pokaż, że jeżeli $n < m$, to $F_n | (F_m - 2)$.

(c) Pokaż, że różne liczby Fermata są względnie pierwsze.

Zadanie 12. Udowodnij, że każdą liczbę naturalną n można zapisać jako sumę **różnych** potęg dwójki.

Zadanie 13. Niech $b \geq 2$ będzie ustaloną liczbą naturalną. Udowodnij, że każdą liczbę naturalną n można zapisać jako sumę $a_0 b^0 + a_1 b^1 + \dots + a_k b^k$ dla pewnego $k \geq 0$ oraz pewnych $a_j \in \{0, 1, 2, \dots, b-1\}$. Czy liczba k i współczynniki $a_0, a_1, \dots, a_k$ wyznaczone są jednoznacznie?